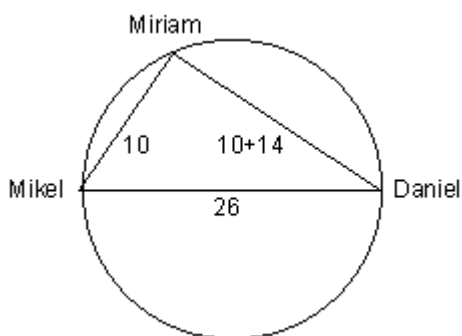


**Problemas propuestos en la XIII Olimpiada Tornamira**

1.- Daniel y Mikel están sentados en puntos diametralmente opuestos de una piscina circular en la que la profundidad del agua es de 1,80 m. Cuando Miriam se sienta al borde de la piscina, los dos se lanzan a nadar en línea recta hacia ella. Una vez que ambos han nadado 10 m., Mikel ha llegado junto a Miriam mientras que a Daniel le faltan 14 m. para alcanzarlos. ¿Cuántos litros de agua hay en esta piscina?

1.- Daniel eta Mikel eserita daude 1,80 m. ur sakonera duen igerileku baten diametralki aurkako bi puntutan. Miriam pizsinako ertzean eseritzen denean beste bi lagunak abiatzen dira igeri egiten zuzen zuzen Miriamenganantz. Biak 10 m. ibili ondoren, Mikel Miriamenganaino iritsi da, eta Danieli oraindik 14 m. falta zaizkio haienganaino iristeko. Zenbat litro ir dago igerileku honetan?

Solución:



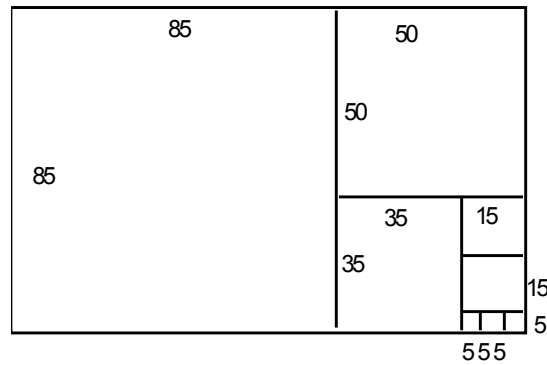
Las posiciones de Miriam, Mikel y Daniel forman un triángulo rectángulo, de catetos conocidos 10 y 24, y cuya hipotenusa es el diámetro de la piscina circular. Aplicando el Teorema de Pitágoras a dicho triángulo obtenemos que el diámetro es 26 por lo que el radio será 13 m.

El volumen de la piscina =  $\pi r^2 h$  por lo que:  
 $V = \pi \cdot 13^2 \cdot 1,80 \approx 955,675 \text{ m}^3 = 955.675 \text{ litros.}$

2.- Carlos es un muchacho peculiar: no sabe multiplicar pero conoce los cuadrados de los números hasta 100. Tiene que calcular el producto  $135 \times 85$ . Carlos dibuja un rectángulo de lados 135 mm. y 85 mm. Traza el mayor cuadrado posible en este rectángulo sobre uno de los lados, hace lo mismo con el rectángulo siguiente y así sucesivamente.... De esta forma consigue ocho cuadrados. Dibuja la figura realizada por Carlos y expresa el número  $135 \times 85$  como suma de ocho cuadrados perfectos.

2.- Carlos mutil berezia da: ez daki biderkaketak egiten baina 100-erainoko zenbakien karratuak dakizki. Kalkulatu behar du  $135 \times 85$  biderkadura. Carlosek 135mm. eta 85 mm. aldetako laukizuzen bat marrazten du. Laukizuzen honetan posible den karraturik handiena marrazten du alde baten gainean, berdin egiten du geratzen zaion laukizuzenean eta honela elkarren segidan....zortzi karratu lortu arte. Marraztu Carlosek egindako irudia eta adierazi  $135 \times 85$  biderkadura zortzi karratu perfektoren arteko batuketa bezala.

Solución:



$$135 \times 85 = 85^2 + 50^2 + 35^2 + 15^2 + 15^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 .$$

3.- El símbolo  $50!$  representa el producto de todos los números naturales desde el 1 hasta el 50, es decir:

$$50! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 48 \times 49 \times 50$$

Si calculas  $50!$  ¿En cuantos ceros acabará el producto?

3.-  $50!$  ikurrak 1-etik 50-erainoko zenbaki natural guztien biderkadura adierazten du,

$$50! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 48 \times 49 \times 50 , \text{ alegia.}$$

$50!$  kalkulatzan baduzu, zenbat zerotan bukatuko du emaitza?

*Solución:*

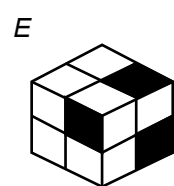
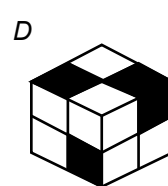
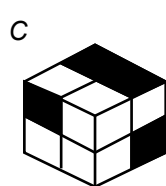
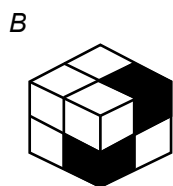
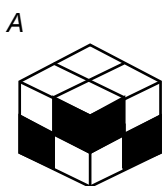
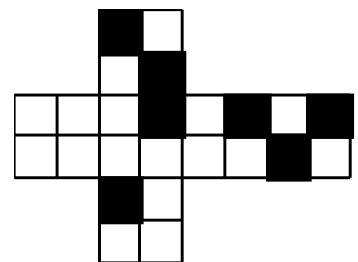
El producto  $50!$  tendrá tantos ceros como número de productos  $5 \times 2$  y ese número coincide con el número de veces que contiene a 5 como factor . Lo estará en :

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 y 50 . Los factores 5 son 12. Observar que  $25 = 5 \times 5$  ( aporta 2 ceros)

$50!$  terminará en 12 ceros.

4.- ¿Cuál de los cubos A, B, C, D, E tiene el siguiente desarrollo?

4.- A, B, C, D, E kuboen artean, zeinek du ondoko garapena?



*Solución:*

La figura b.

5.- En una clase el 40 % de los alumnos tienen mala vista. El 70% de los que tienen mala vista llevan gafas y el 30% restante utiliza lentes de contacto. Son 21 los alumnos de la clase que llevan gafas. ¿Cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

- a) 45 alumnos tienen mala vista.
- b) 30 alumnos tienen buena vista.
- c) La clase tiene 100 alumnos.
- d) 10 alumnos utilizan lentes de contacto.
- e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

5.- Gela bateko ikasleen %40-ak ikusmena gaizki dute. Ikusmena gaizki dutenen % 70-k betaurrekoak eramaten dituzte, eta beste % 30-ak lentilak erabiltzen dituzte. Betaurrekoak eramaten dituzten ikasleak gela horretan 21 dira. Ondoko esaldien artean zein edo zeintzu dira egiazkoak?

- a) 45 Ikaslek ikusmena gaizki dute.
- b) 30 ikaslek ikusmena ongi dute.
- c) Gelan 100 ikasle daude.
- d) 10 ikaslek lentilak erabiltzen dituzte.
- e) Aurreko esaldien artean bat ere ez da egiazkoa.

*Solución:*

De los datos del problema:

Llevan gafas:  $70\% \cdot 40\% = 28\% = 21$  alumnos

Usan lentillas:  $30\% \cdot 40\% = 12\% = 9$  alumnos

Tienen mala vista:  $40\% = 30$  alumnos ; buena vista:  $60\% = 45$  alumnos

El número total de alumnos será  $30 + 45 = 75$ . Por lo tanto las frases:

- |   |            |
|---|------------|
| a) 45 alumnos tienen mala vista.                        | Falsa      |
| b) 30 alumnos tienen buena vista.                       | Falsa      |
| c) La clase tiene 100 alumnos.                          | Falsa      |
| d) 10 alumnos utilizan lentes de contacto.              | Falsa      |
| e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera. | Verdadera. |

6.- Se quieren pintar de azul las columnas cilíndricas de mayor altura que soportan el porche del colegio. El presupuesto (precio neto de la pintura más 16% de I.V.A.) ha sido 165.258,24 pta.

Utilizando la cuerda de 1 m. estima la altura de cada columna, sabiendo que el precio neto por pintar un  $m^2$  de columna es de 1.200 pta.

6.- Urdinez margotu nahi dira Ikastetxeko aterpea eusten duten zutabe zilindriko altuenak. Aurrekontua ( margoaren prezio garbia gehi B.E.Z.) 165.258,24 pta.-koa izan da.

Metro bateko sokatxo erabiliz, zutabe bakoitzaren altuera estimatu, zutabeko  $m^2$  bat margotzeko prezio garbia 1.200 pta. dela jakinik.

**Problemas propuestos en la XIV Olimpiada Tornamira**

1.- La media de edad de un grupo de médicos y maestros es de 40 años. Si la edad media de los médicos es de 50 años y la de los maestros es de 35, ¿Cuál es la proporción entre el número de maestros y es de médicos del grupo?.

1.- Sendagile eta maisu talde baten adinaren batazbestekoa 40 urte da. Sendagileen batazbestekoa 50 urte eta maisuena 35 urte izanik, zein da sendagile eta maisuen kopuruen arteko proportzioa?

*Solución:*

Si llamamos n al número de médicos y m al número de maestros, se verifica que:

- La suma de las edades del grupo de médicos es:  $50n$
- La suma de las edades del grupo de maestros es:  $35m$
- La suma de las edades de todo el grupo es:  $40(n+m)$

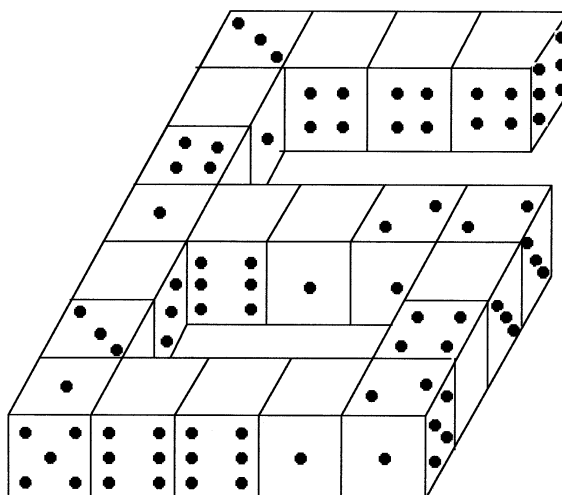
Luego  $50n + 35m = 40(n+m)$ , de donde obtenemos que  $2n = m$ , es decir, el número de maestros es el doble que el de médicos.

2.- Mikel ha construido un “seis” con dados iguales. Los ha unido siguiendo la siguiente regla: las caras que están unidas tienen el mismo número de puntos. Completar las once caras vacías dibujando los puntos.

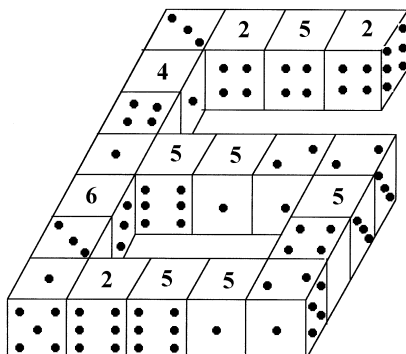
*NOTA: La suma de puntos de caras opuestas de un dado es siempre 7.*

2.- Mikelek “sei” bat osatu du dado berdinak erabiliz. Egiteko, ondoko araua jarraitu du: itsasita dauden aldeek puntu kopuru berdina dute. Osatu, puntuak margotuz, hutsik dauden hamaika aldeak.

*OHARRA: Dado baten aurkako aldean puntu kopuruen batura 7 da.*



Solución:



3.- En un libro del famoso matemático Pedro Puig Adam, cuyo centenario se celebra este año, se recoge el siguiente problema histórico:

Un hortelano que llevaba manzanas entró en un vergel que tenía tres guardas; al primer guarda que encontró, por permitirle pasar por el vergel, le dio la mitad de las manzanas que llevaba, más dos manzanas; al segundo guarda que en su paseo tropezó, por dejarle ver el huerto, le dio la mitad de las manzanas que le quedaban, más dos manzanas; y al tercer guarda, por concederle también estar en el huerto, le dio la mitad de las manzanas que le quedaban, más dos manzanas y le sobró una. ¿ Con cuántas manzanas entró en el vergel, y cuántas dio a cada guarda?

3 .- Pedro Puig Adam matematikari ospetsuaren, zeinen mendeurrena aurten ospatzen baita, liburu batean, ondoko problema historikoa agertzen da:

Sagarrak zeramatzan baratze bat, hiru zaintzaile zituen baratze batera sartu zen; lehen zaintzaileari, sartzen uzteagaitik, zeramatzan sagarren erdia gehi bi sagar eman zizkion; topatu zuen bigarren zaintzaileari, baratzea ikusten uzteagaitik, geratzen zitzaizkion sagarren erdia gehi bi sagar eman zizkion; eta hirugarren zaintzaileari, baratzean geratzen ere uzteagaitik, zeramatzan sagarren erdia gehi bi sagar eman zizkion, eta sagar bat sobra zitzaion. Zenbat sagarrekin sartu zen baratzean, eta zenbat sagar eman zion zaintzaile bakoitzari?

Solución:

Si llamamos "x" al número de manzanas que llevaba el hortelano cuando entró en el vergel:

- al primer guardián le dio:  $\frac{x}{2} + 2$  manzanas y le quedaron  $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x-4}{2}$  manzanas.
- al segundo guardián le dio  $\frac{x-4}{2} + 2$  manzanas y le quedaron  $\frac{x-4}{2} - 2 = \frac{x-12}{4}$  manzanas.
- al tercer guardián le dio  $\frac{x-12}{4} + 2$  manzanas y le quedaron  $\frac{x-12}{4} - 2 = \frac{x-28}{8}$  manzanas.

Luego  $\frac{x-28}{8} = 1$  ;  $x = 36$ .

Al primer guardián le da 20 manzanas y le quedan 16. Al segundo le da 10 manzanas y le quedan 6. Al tercero le da 5 manzanas y le queda 1 manzana.

Nota: Los problemas de este tipo conviene empezarlos "por atrás".

Si suponemos que tenía "m" manzanas cuando se encuentra con un guardián, a este le dio  $\frac{m}{2} + 2$

manzanas y le quedaron  $\frac{m}{2} - 2 = \frac{m-4}{2}$  manzanas al final de cada entrega (m es diferente en cada caso).

Al final le queda una manzana, luego:  $\frac{m-4}{2} = 1$       m = 6 manzanas

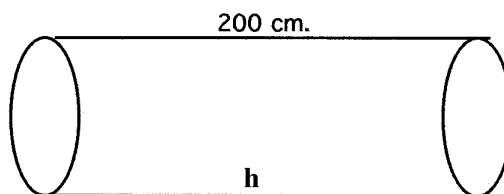
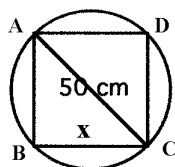
Por la misma razón, en la segunda entrega:  $\frac{m-4}{2} = 6$       m = 16 manzanas

y en el primer caso:  $\frac{m-4}{2} = 16$       m = 36 manzanas.

4.- Tenemos un tronco cilíndrico de madera de 2 metros de largo y 50 cm. de diámetro y queremos hacer una viga rectangular que tenga el máximo volumen posible ( es decir: de base cuadrada). ¿ Qué volumen de madera se desperdiciará?.

4.- Egurrezko embor zilindriko bat dugu bere neurriak 2 metro luze eta diametro 50 zentimetro izanik, eta gapirio errektangeluar bat egin nahi dugu ahalik eta bolumen handienekoa ( oinarri karratukoa, alegia). Egurrezko zein bolumen alferrikalduko da?.

Solución:



Si x es el lado del cuadrado de la viga, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ABC obtenemos que  $2x^2 = 50^2$  de donde  $x = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$  cm.

Volumen de madera desperdiciada = Volumen del tronco cilíndrico – Volumen de la viga cuadrada

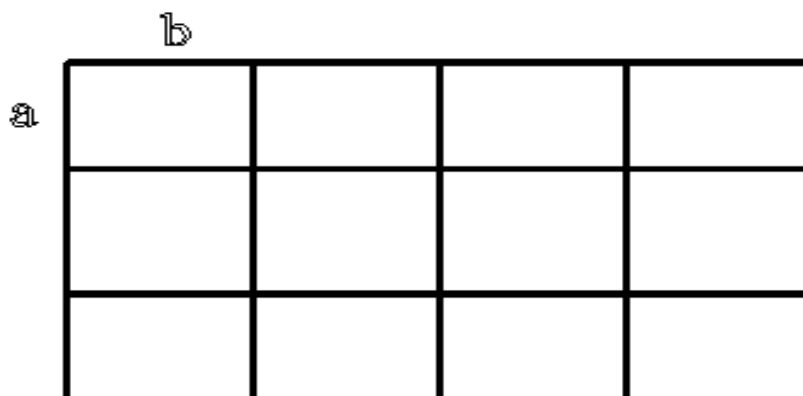
Volumen del tronco cilíndrico =  $\pi r^2 h = \pi \cdot 25^2 \cdot 200 = 125.000\pi$  cm<sup>3</sup>.

Volumen de la viga cuadrada =  $x^2 h = 1250 \cdot 200 = 250.000$  cm<sup>3</sup>.

Madera desperdiciada =  $125.000\pi - 250.000 \approx 142.700$  cm<sup>3</sup> = 0,1427 m<sup>3</sup>.

5.- En la figura adjunta, ¿cuántos rectángulos hay?

5.- Zenbat laukizuzen dago ondoko irudian?



Solución:

Llamamos rectángulo unidad a cada uno de los 12 rectángulos  $a \times b$  que componen la figura:

Rectángulos formados por	Dimensiones	Número
1 rectángulo unidad	$(a \times b)$	12
2 rectángulos unidad	$(a \times 2b)$ ; $(2a \times b)$	$9 + 8 = 17$
3 rectángulos unidad	$(a \times 3b)$ ; $(3a \times b)$	$6 + 4 = 10$
4 rectángulos unidad	$(a \times 4b)$ ; $(2a \times 2b)$	$3 + 6 = 9$
6 rectángulos unidad	$(2a \times 3b)$ ; $(3a \times 2b)$	$4 + 3 = 7$
8 rectángulos unidad	$(2a \times 4b)$	2
9 rectángulos unidad	$(3a \times 3b)$	2
12 rectángulos unidad	$(3a \times 4b)$	1
	TOTAL	$12 + 17 + 10 + 9 + 7 + 2 + 2 + 1 = 60$

6.- "A Dios rogando y con el martillo dando"

No se trata de que te partas la cabeza a martillazos, sino de que la emplees aguzando el ingenio, para calcular cuánto nos costaría pintar totalmente esta cabeza de martillo que te damos, sabiendo que pintar un  $m^2$  cuesta 750 pesetas y que además nos cobran el 16% de I.V.A (impuesto).

NOTA.- Las dimensiones de; martillo las deberás medir con la cuerda de 30 cm que te damos.

6.- "Jaungoikoari erreguz, beharrari mailuz"

Helburua ez da mailukadaz burua haustea, baizik eta burua erabiltzea kalkulatzeko zenbat kostatuko litzaiguen ematen dizugun mailu-burua erabat margotzea,  $m^2$  bakoitza margotzeak 750 pta. kostatzen duela eta, gainera, B. E. Z. delakoa kobratzen digutela (%16) jakinik.

OHARRA.- Mailuko neurriak emandako 30 zm.ko soka erabiliz lortu beharko dituzue.

**Problemas propuestos en la XV Olimpiada Tornamira**

1.- Un tren correo, un AVE y un avión parten a la misma hora. Si tomo el tren correo, cuya velocidad media es de 100 km/h, llego a las 20 h. Y si tomo el AVE, cuya velocidad media es de 300 km/h, llego a las 14h. ¿ A qué hora llegaré si tomo el avión, cuya velocidad media es de 900 km/h?

1.- Postatren bat, AVE bat eta hegazkin bat batera abiatzen dira. Postatrena hartzekotan, 100 km/h batazbesteko abiaduraz, 20etan iristen naiz, eta, AVE hartzekotan, 300 km/h batazbesteko abiaduraz, 14etan iristen naiz. Zein ordutan iritsiko naiz hegazkina hartzen badut bere batazbesteko abiadura 900 km/h dela jakinik?

*Solución:*

Sea  $t$  = tiempo que tarda en llegar el tren correo,  $(t - 6)$  = tiempo que tarda en llegar el AVE.  
Como recorren el mismo trayecto tendremos que  $100t = 300(t-6)$  de donde  $t = 9$  horas y el espacio recorrido 900 km. Así:

	Velocidad	Distancia	Tiempo empleado	Hora salida	Hora llegada
<b>TREN CORREO</b>	100 km/h	900 km	9 h	11 h	20 h
<b>AVE</b>	300 km/h	900 km	3 h	11 h	14 h
<b>AVIÓN</b>	900 km/h	900 km	1 h	11 h	12 h

2.- La pandilla de los cinco está formada por tres chicas de, respectivamente, 11, 12 y 13 años y dos chicos de, respectivamente, 11 y 13 años.

- D y C son del mismo sexo.
- O y A son de la misma edad.
- P es más joven que C y del mismo sexo que A.

¿Cuáles son la edad y el sexo de cada uno de los miembros de la pandilla?

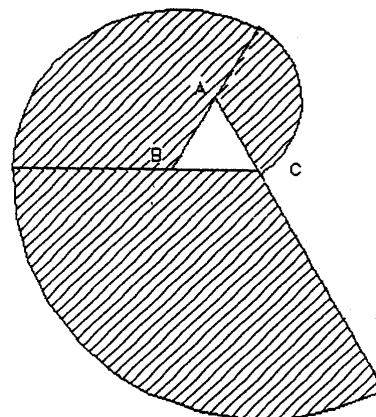
2.- Bosten laguntaldea, 11, 12 eta 13 urteko hiru neskek eta 11 eta 13 urteko bi mutikok osatzen dute.

- D eta C sexu berdinekoak dira.
- O eta A adin berdinekoak dira.
- C baino gazteago eta A ren sexu berdinekoa da P.  
Zein da taldekide bakoitzaren adina eta sexua?

*Solución:*

CHICAS			CHICOS	
D	C	O	A	P
11	12	13	13	11

3.- En la figura adjunta ABC es un triángulo equilátero de 1 cm. de lado. La espiral está formada por arcos de circunferencia de centros sucesivos A, B y C. Calcular la longitud de la espiral y el área de la superficie rayada. ¿Cómo seguiríamos construyendo la espiral?



3.- Ondoko irundian ABC 1 cm. aldeko triangelu aldekideda. Espirala A, B eta C zentruetako zirkunferentzi arkuz osatua da. Kalkulatu espiralen luzeera eta azal marradunaren azalera. Nola jarraituko genuke espirala eraikitzen?

Solución:

El área será la suma de tres sectores circulares de 120° - cada sector es 1/3 del círculo correspondiente- y de radios 1 , 2 y 3 cm.

$$\text{Área} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 120}{360} + \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120}{360} + \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 120}{360} = \frac{14\pi}{3} \text{ cm}^2$$

La longitud será la suma de las longitudes de los tres arcos de 120° -cada arco es 1/3 de la circunferencia correspondiente- y radios 1 , 2 y 3 cm.

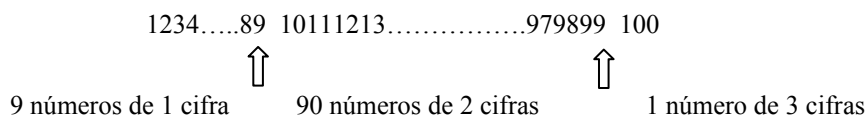
$$\text{Longitud} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 120}{360} + \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 120}{360} + \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 120}{360} = 4\pi \text{ cm.}$$

Seguiríamos la espiral trazando un arco de circunferencia de 120° con centro en A y radio 4....

4.- El número 1234.....979899100 ¿ cuántas cifras tiene? ¿es múltiplo de 2, de 3, de 5, de 6, de 8, de 9?

4.- 1234.....979899100 zenbakiak zenbat zifra du? 2-ren, 3-ren, 5-en, 6-ren, 8-ren edo 9-ren múltiplo al da?

Solución:



Luego tiene 9 + 180 + 3 = 192 cifras

Es múltiplo de 2 y 5 por acabar en cero.

Las 192 cifras del número del enunciado son:

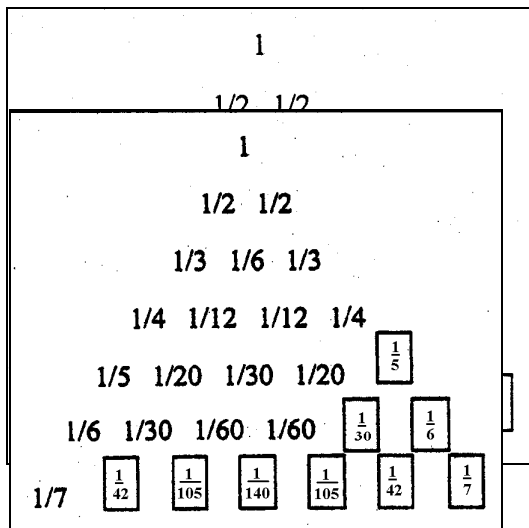
- 11 ceros
- 21 unos
- 20 doses
- 20 treses
- 20 cuatros
- 20 cincos
- 20 seises
- 20 sietes
- 20 ochos

La suma de las cifras es 901 que no es múltiplo de tres luego el número no será múltiplo de 3 ni de 6 ni de 9.

Tampoco es múltiplo de 8 porque las tres últimas cifras ( 100 ) no lo son.

5.- Encontrar las fracciones que faltan en los huecos del siguiente triángulo aritmético.

5.- Ondoko triangelu aritmetikoaren hutsunetan falta diren zatikiak aurkitu.



Solución: Cada número se obtiene sumando los dos que están por debajo de él.

6.- Queremos construir un banco de forma casi cilíndrica alrededor de la columna que encontraréis en la parte central del porche. No lo podemos hacer de forma totalmente circular porque tropezaríamos con la valla, así que hemos decidido que tenga una superficie para sentarse de la forma que señala la figura y una altura de 40 cm. Con la ayuda de la

cuerda de longitud L que está atada a la columna y con la cinta métrica que os proporcionamos queremos que calculéis los metros cúbicos de hormigón necesarios para construir el banco.

NOTA.- Los dos segmentos remarcados son rectos.

6.- Aterpearen erdikaldean aurkituko duzuen zutabearen ingurunean ia zilinko itxurako eserleku bat egin nahi dugu. Ezin da erabat zilindriko egin hesia dagoela eta. Beraz, crabaki dugu esertzeko azalak ondoko irudiaren forma izan dezala, eta altuera 40 cm.koa izatea. Zutabearen lotuta dagoen L neurriko soka eta eman dizuegun zinta metrikoaren laguntzaz kalkula ezazue zenbat metro kubiko ormigoi behar diren eserlekua egiteko.

OHARRA.- Azpimarratutako bi zuzenkiak zuzenak dira.

